CONCOURS COMMUN MINES.PONTS 1978

OPTIONS M ET P' - 1ÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 3 pages.

- - - - -

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

I

I-1) Soit $\mathcal{A}$ un anneau unitaire, $1_{\mathcal{A}}$ l'unité de $\mathcal{A}$.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ formé par les éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est une partie stable pour la multiplication définie sur $\mathcal{A}$ et que la multiplication induite confère à $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ une structure de groupe.

I-2) Soit $\mathcal{A}_1$ un sous anneau de $\mathcal{A}$ comprenant $1_{\mathcal{A}}$. Montrer que $\mathcal{A}_1$ est unitaire et que l'on a : $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_1} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}_1$

I-3) Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$ sont des sous anneaux unitaires de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée construit sur $\mathbb{R}$. Déterminer

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}[X]},\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}[X]},\ \mathcal{U}_{\mathbb{R}[X]} \cap \mathbb{Z}[X] \text{ et } \mathcal{U}_{\mathbb{R}[X]} \cap \mathbb{Q}[X]$$

- - - - -

II

K désigne un corps commutatif. Sa caractéristique n'est pas 2. Son unité est notée 1. On pourra noter 2 l'élément 1 + 1.
a, b, c désignent 3 éléments donnés de K, non tous nuls. On pourra poser $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma$
$\mathcal{M}(3,K)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à éléments dans K.
E désigne la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; P désigne la matrice $\begin{bmatrix} -c^2 & bc & -ac \\ bc & -b^2 & ab \\ -ac & ab & -a^2 \end{bmatrix}$

II-1) Soit n un naturel. Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice P. Indiquer si la matrice P est régulière.

II-2) On désigne par $[E, P]$ l'ensemble des matrices qui sont combinaisons linéaires de E et de P : $[E,P] = \left\{ M \in \mathcal{M}(3,K) \;\middle|\; \exists (\lambda, \mu) \in K^2,\ M = \lambda E + \mu P \right\}$
On sait que $[E,P]$ est un sous espace vectoriel du K, espace vectoriel construit sur $\mathcal{M}(3,K)$. Quelle est la dimension de ce sous espace vectoriel ?
Montrer que $[E,P]$ est un sous anneau unitaire de l'anneau $\left(\mathcal{M}(3,K), +, \times\right)$.
L'anneau $\left([E,P], +, \times\right)$ est-il commutatif ?

II-3) Déterminer : $\mathcal{U}_{[E,P]}$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{M}(3,K)} \cap [E,P]$

II-4) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice $\lambda E + \mu P$
On supposera $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, on pourra supposer que $K = \mathbb{C}$.

II-5) Soit T la matrice $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$. On désigne par $[E,P,T]$ l'ensemble des matrices qui

.../...

sont combinaisons linéaires de E, P et T. Déterminer dim $[E,P,T]$

Montrer que $[E,P,T]$ est un sous anneau commutatif unitaire de $(\mathcal{M}_6(3,K), +, \times)$

Déterminer $\mathcal{U}_{[E,P,T]}$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{M}_6(3,K)} \cap [E,P,T]$

II-6) On suppose que l'on a : $\left(\lambda - \mu\,(a^2 + b^2 + c^2)\right)(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$. Montrer que les matrices $(\lambda E + \mu P + T)(\lambda E + \mu P - T)^{-1}$ et $(\lambda E + \mu P - T)(\lambda E + \mu P + T)^{-1}$ sont orthogonales droites.

Indiquer les valeurs des éléments de ces matrices

II-7) Soit $S = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \varepsilon \\ \delta & \beta & \phi \\ \varepsilon & \phi & \gamma \end{bmatrix}$ une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_6(3,K)$

Montrer que, pour que l'on ait ST = TS, il faut et il suffit que $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\phi)$ soit solution du système :

$$\begin{cases} a\delta + b\varepsilon = 0 \\ a\delta - c\phi = 0 \\ b\varepsilon + c\phi = 0 \\ -a\alpha + a\beta + c\varepsilon + b\phi = 0 \\ b\alpha - b\gamma + c\delta - a\phi = 0 \\ c\beta - c\gamma + b\delta + a\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système et en déduire la forme générale des matrices S

(On pourra distinguer 4 cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$
$a \neq 0$ et $b = 0$
$a = 0$ et $b \neq 0$
$a = 0$ et $b = 0$)

II-8) Déterminer le rang de la matrice Σ définie par $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ -a & a & 0 & 0 & c & b \\ b & 0 & -b & c & 0 & -a \\ 0 & c & -c & b & a & 0 \end{bmatrix}$

II 9) Soit $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{bmatrix}$ une matrice antisymétrique appartenant à $\mathcal{M}_6(3,K)$

Déterminer A, B, C pour que l'on ait $\Theta T = T \Theta$

En déduire la forme générale des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_6(3,K)$ qui commutent avec T.

- - - - -

III

$\mathcal{E}$ désigne un espace vectoriel euclidien.

Le produit scalaire de 2 vecteurs X et Y de $\mathcal{E}$ est noté X.Y

III-1) Soit f et g deux applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On suppose que l'on a :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{E}^2, \quad f(X).Y = X.g(Y)$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathcal{E}$.

III-2) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble $A(f)$ des endomorphismes g de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\forall (X,Y) \in \mathcal{E}^2$, $f(X).Y = X.g(Y)$ a au plus un élément. Déterminer $A(Id)$ et $A(0)$, Id et 0 désignant respectivement les endomorphismes de $\mathcal{E}$ définis par :

$$Id(X) = X \qquad 0(X) = 0$$

.../...

III-3) Lorsque A(f) n'est pas vide, on désigne par f^* son unique élément. Montrer qu'alors A(f^*) n'est pas vide et déterminer f^{**}.

Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{E}$, a et b des réels. Montrer que si A(f) et A(g) sont tous deux non vides, A($af + bg$) et A($g \circ f$) sont non vides et déterminer $(af + bg)^*$ et $(g \circ f)^*$

III-4) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$. On suppose A(f) non vide.

a) montrer que si f est surjectif, f^* est injectif

b) on suppose que f est bijectif et que A(f^{-1}) n'est pas vide. Montrer que f^* est bijectif.

III-5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des endomorphismes f de $\mathcal{E}$ pour lesquels A(f) est non vide, par $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{A}$ vérifiant $f^* = f$, enfin par $\mathcal{T}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{A}$ vérifiant $f^* = -f$

a) montrer que $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ sont des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel construit sur l'ensemble End $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{A}$ est somme directe de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$. f étant un élément de $\mathcal{A}$, on désigne désormais par $s(f)$ l'unique élément de $\mathcal{S}$ et par $t(f)$ l'unique élément de $\mathcal{T}$ vérifiant $f = s(f) + t(f)$

b) soit σ un élément de $\mathcal{S}$, τ un élément de $\mathcal{T}$. Montrer que pour qu'un élément f de $\mathcal{A}$ commute avec σ (ou avec τ) il faut et il suffit que $s(f)$ et $t(f)$ commutent avec σ (ou avec τ)

c) montrer que ($\mathcal{A}$, +, $\circ$) est un anneau unitaire. En est-il de même de ($\mathcal{S}$, +, $\circ$) et de ($\mathcal{T}$, +, $\circ$) ?

III-6) On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{A}$ vérifiant $s(f) \circ t(f) = t(f) \circ s(f)$

Soient X et Y deux vecteurs de $\mathcal{E}$, f un élément de $\mathcal{C}$. Calculer

$s(f)(X) \cdot t(f)(Y) + t(f)(X) \cdot s(f)(Y)$

$f(X) \cdot f(Y) - f^*(X) \cdot f^*(Y)$

III-7) Soit f un élément de $\mathcal{A}$. Montrer que l'on a

$$f \in \mathcal{C} \iff f \circ f^* = f^* \circ f$$

III-8) Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Montrer que si l'un des endomorphismes $s(f)$ ou $t(f)$ est injectif, il en est de même de f et de f^*.

III-9) Soit f un automorphisme de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{C}$. On désigne par g l'endomorphisme $f^* \circ f^{-1}$. X et Y désignant deux vecteurs de $\mathcal{E}$, calculer $g(X) \cdot g(Y) - X \cdot Y$

III-10) Soit f un automorphisme de $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{C}$.

On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension finie

On désigne par $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$

On pose $A_i = f(U_i)$ pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$A_i^* = f^*(U_i)$ pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

On désigne par S la matrice de $s(f)$ et par T la matrice de $t(f)$ lorsqu'on rapporte $\mathcal{E}$ à la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$

Déterminer les matrices de $s(f)$ et de $t(f)$ lorsqu'on rapporte $\mathcal{E}$ à la base $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ (ou à la base $(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)$)

Déterminer la matrice de f lorsqu'on rapporte $\mathcal{E}$ à la base $(A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*)$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail